5.4 Revêtements normales

Soit $p : Y \to X$ un rev.

Déf : Une <u>transformation</u> de Y est un isom. de rev. $Y \to Y$.
Ils forment un groupe $Aut(Y)$ (ou $Aut(p)$) par composition.

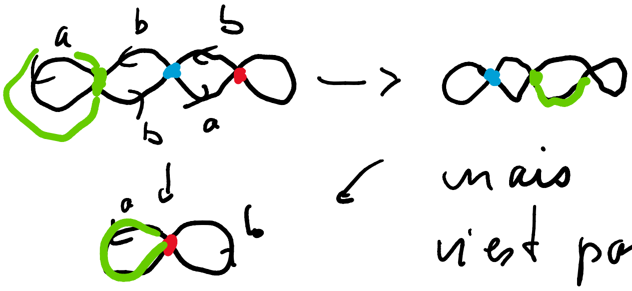
Rmk : Par l'unicité des rel. si $f_1, f_2 \in Aut(Y)$ et $\exists y \in Y$ t.q. $f_1(y) = f_2(y)$, alors $f_1 = f_2$. En part si $f \in Aut(Y)$ fix un point on a $f = Id_Y$.

Expl : · $\mathbb{R} \to S^1$. $t_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+n$ $\in Aut(\mathbb{R})$ et si $f \in Aut(\mathbb{R})$ on doit avoir $f(0) = n \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1) \Rightarrow Aut(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$.

· $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$, $Aut(S^1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Ex?)

Déf : Un rev. $p : Y \to X$ est <u>normal</u> (ou <u>galoisien</u>) si $\forall x \in X$ et $\forall y, y' \in p^{-1}(x)$ $\exists f \in Aut(Y)$ t.q. $f(y) = y'$!

Non-expl :



mais $O \mapsto U$ n'est pas continue.

Prop 5.10 : Soit $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ un rev. avec Y connex et X conn. et loc. conn. Soit $H = \operatorname{Im} p_* \subset \pi_1(X, x_0)$. Alors

a) Y est normal $\Leftrightarrow$ H est un sous-groupe normal.

b) $Aut(Y) \cong N(H)/H$ avec $N(H) = \{ g \in \pi_1(X, x_0) \mid g^{-1} H g = H \}$ le normalisateur de H.

En part. $Aut(Y) \cong \pi_1(X, x_0)/H$ si Y est normal et donc pour le rev. univ. $\tilde{X} \to X$ on a $Aut(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$.

En part. $Aut(Y) = \pi_1(X,x_0)/H \Leftrightarrow Y$ est normal et donc pour le rev. univ. $\tilde{X} \to X$ on a $Aut(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$.

<u>pf:</u> "$\Rightarrow$": Soit $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ et $\tilde{\alpha}$ le rel. unique avec $\tilde{\alpha}(0) = y_0$

Y norm $\Rightarrow \exists f \in Aut(Y)$ t.q. $f(y_0) = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$

En plus on a vu dans la preuve de 5.9 que

$$[\alpha]^{-1} H [\alpha] = p_* \pi_1(Y, \tilde{\alpha}(1)).$$

Comme $f_*: \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \tilde{\alpha}(1))$ commute on a $p_* \pi_1(Y, \tilde{\alpha}(1)) = H$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p_*"'] & \pi_1(Y,\tilde{\alpha}(1)) \arrow[d, "p_*"] \\ & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

et donc H est normal.

"$\Leftarrow$": Soit $x \in X$ et $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$. H normal $\Rightarrow p_* \pi_1(Y, y_1) = p_* \pi_1(Y, y_2)$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dotted] & X \end{tikzcd}$$

Par 5.4 $\exists$ un rel. $f: Y \to Y$ t.q. $f(y_1) = y_2$ et

" $g: Y \to Y$ $g(y_2) = y_1$.

Par l'unicité des rel. 5.5, $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ et donc f est une transf. $\square$

b) On déf. une appl. $\varphi: N(H) \to Aut(Y)$

$[\alpha] \mapsto f_\alpha$ t.q. $f(y_0) = \tilde{\alpha}(1)$

Ou on utilise comme avant

5.4 et 5.5. et $[\alpha]^{-1} H [\alpha] = H$ pour $[\alpha] \in N(H)$.

<u>φ est un homom:</u> Soient $[\alpha], [\alpha'] \in N(H)$. Alors $\tilde{\alpha} * (f_\alpha \circ \tilde{\alpha}')$ relève

$\alpha * \alpha'$. $\to \varphi([\alpha][\alpha'])$ est la trans. qui envoie y_0 à $\tilde{\alpha} \cdot (f_\alpha \circ \tilde{\alpha}')(1)$

Par unicité $\varphi([\alpha][\alpha']) = f_\alpha \cdot f_{\alpha'} =$

$= f_\alpha(\tilde{\alpha}'(1)) = f_\alpha(f_{\alpha'}(y_0))$

<u>φ est surj:</u> Soit $f \in Aut(Y)$. et $\tilde{\alpha}: I \to Y$ un chemin t.q. $\tilde{\alpha}(0) = y_0$

$\tilde{\alpha}(1) = f(y_0)$

Alors comme avant on voit que $[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] \in N(H)$ et $\varphi([\alpha]) = f$.

<u>$Ker(\varphi) = H$:</u> $[\alpha] \in Ker(\varphi) \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(1) = y_0 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}$ est un lacet $\overset{5.2}{\Leftrightarrow} [\alpha] \in H$ $\square$

Comparaison avec la théorie de Galois:

Comparaison avec la théorie de Galois:

Galois	Revêtements
Corps F (supp. parfait)	Esp. top. X
Ext alg. L/F	Rev. $Y \to X$
Ext. Galois L/F	Rev. norm. $Y \to X$
$Gal(L/F)$	$Aut(Y)$
$\overline{F}/F$	Rev. univ. $\tilde{X} \to X$
$Gal(\overline{F}/F)$	$\pi_1(X)$
$H < Gal(L/F) \overset{\text{Thm}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} L \\ \downarrow {\scriptstyle Gal(L/K) = H} \\ K = L^H \\ \downarrow {\scriptstyle \deg \lvert Gal/H \rvert} \\ F \end{array}$	$H < \pi_1(X) \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \tilde{X} \\ \downarrow \\ X_H \\ \downarrow {\scriptstyle \lvert \pi_1(X)/H \rvert} \\ X \end{array}$

<u>Déf</u>: Un groupe discret G agit sur X <u>totalement discontinu</u> si $\forall x \in X$ $\exists U \subset X$ vois de x t.q. $Ug \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq e_G$.

<u>Rmk</u>: · En part. une tel action est libre car $xg = xh \Rightarrow x = xgh^{-1} \Rightarrow gh^{-1} = e_G$.

· Pour un groupe fini libre $\Leftrightarrow$ tot. disc. (Ex?)

<u>Prop 5.11</u>: Soit $G \curvearrowright Y$ une action tot. disc. Alors

a) $p: Y \to Y/G$ est un rev. normal.

b) Si Y est connex, $Aut(Y) = G$

c) $G \cong \pi_1(Y/G)/p_*(\pi_1(Y))$, si Y est connex et loc connex.

<u>Pf</u>: Soit $U \subset Y$ ouvert t.q. $Ug \cap U \neq \emptyset$ $\forall g \neq e_G$. Alors $p^{-1}(p(U)) = \coprod_{g \in G} Ug$ et $p|_{U_g}: U_g \to p(U)$ est un homeom.

$p^{-1}(p(U)) = \coprod_{g\in G} U_g$ et $p_{|U_g} : U_g \to p(U)$ est un homéom.
$\phantom{p_{|U_g} :} ug \mapsto [u]$

$\rightsquigarrow Y \to Y/G$ est un rev. et $\forall g\in G \quad g : Y \to Y$ est une trans.
$ y \mapsto yg$

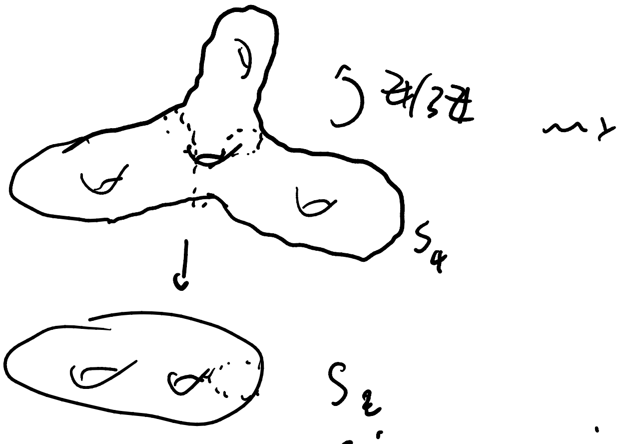
Comme $p^{-1}([y]) = \{y\cdot g \mid g\in G\}$, $\forall y, y' \in p^{-1}([y])\ \exists!\, g\in G\ \ y\cdot g = y'$ et donc Y est normal. a)

Si Y est connexe, par unicité, tout les $f\in Aut(Y)$ sont de cette forme $\rightsquigarrow Aut(Y) = G$. b)

5.10 b) implique c) $\square$

<u>Exple</u>: · $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ par addition. prop. disc
$\overset{c)}{\rightsquigarrow} \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

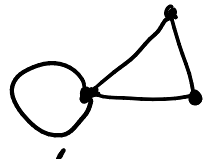
· $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright S^n$ libre $\rightsquigarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n\geq 2$

· 

$S_4 \to S_2$ un rev. conn.
$\rightsquigarrow \pi_1(S_4) \triangleleft \pi_1(S_2)$
et $\pi_1(S_2)/\pi_1(S_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

On peut généraliser ceci à des rev. $S_{mn+1} \to S_{n+1}$ et ce sont les seuls rev. entre les S_g.

<u>5.5 Graphes et groupes libres:</u>



Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe avec S un ens. de sommets A un ens d'arêtes et $\sigma_0, \sigma_1 : A \to S$ les appl qui désignent l'origine et le but d'une arêtes.

On considère Γ comme l'espace topo.

$\Gamma = \coprod S \sqcup \coprod I_a / \sim$

On considère Γ comme l'espace topo.

$$\Gamma = \bigsqcup_{s\in S}\{s\} \cup \bigsqcup_{a\in A} I_a \Big/ \forall a,\ I_a \ni 0 \sim r_0(a),\ I_a \ni 1 \sim r_1(a)$$

Exple: Si $|S| = 1$, $\Gamma = \bigvee_{a\in A} S^1$.

Def:

- Un sous-graphe est un sous-esp. fermé de Γ qui est une union des sommets et arêtes de Γ.
- Un arbre est un graph contractile
- Un arbre maximal est un arbre qui contient tous les sommets de Γ $\Leftrightarrow$ un arbre qui n'est pas un sous-graphe strict d'un autre arbre.

Fait (sans preuve): Chaque graphe connexe contient un arbre maximal.

Lemme 5.12:

a) Soit Γ un graph connexe et $T\subset\Gamma$ un arbre max. Alors $\pi_1(X)$ est le groupe libre sur les arêtes de $X\setminus T$.

b) Soit $p: Y\to\Gamma$ un revêtement. Alors Y est un graph.

pf: a) On a vu (pour un nombre fini d'arêtes), que $\Gamma\to\Gamma/T$ est une equiv. d'homot. Comme T contient tous les sommets,

$$\Gamma/T \cong \bigvee_{\substack{\text{arêtes}\\ \text{de } X\setminus T}} S^1.$$

b) Pour donner Y la structure d'un graphe, soit $S_Y := p^{-1}(S)$. Pour chaque $a: I_a \to \Gamma$ et $z\in p^{-1}(r_0(a))$ on obtient un unique relev. $\tilde{a}: I_a \to Y$. Ceci donne les arêtes de Y. $\square$

Thm 5.13: Chaque sous-groupe d'un groupe libre est

libre

Thm 5.17. Chaque sous-groupe d'un groupe libre est libre.

pf: Soit $F = F(A)$ un groupe libre. On prend $\Gamma = \bigvee_A S^1$, qui a donc $\pi_1(\Gamma) = F$. Pour un sous-groupe $H < F = \pi_1(\Gamma)$ on considère le rev. $Y_H \to \Gamma$ corresp par 5.9., qui est un graph par 5.12 b) Alors $\pi_1(Y_H)$ est un groupe libre par 5.12 a) p_* est un isom $\pi_1(Y_H) \xrightarrow{\simeq} H \subset \pi_1(\Gamma)$, donc H est un groupe libre.

Quel suite?

- Etudier les $\pi_k(\cdot)$. C'est assez compliqué... Même $\pi_k(S^n)$ n'est pas connu en général! On sait que $|\pi_k(S^n)| < \infty$ sauf si $k = n$ ($\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$) ou n pair et $k = 2n-1$ (Serre).
- En plus $\pi_{n+k}(S^n)$ est indep. de n pour $n \geq k+2$ (2023)
  $\leadsto$ groupes d'homot. stables. Ils sont connu jusqu'à $k = 90$.

On obtient une inv. plus simple que $\pi_1(X, x_0)$ si on ne fixe pas le point de base. $\leadsto S^1 \to X$ à homotopie non-pointé près
$\leadsto$ L'invariante qu'on obtien est l'abelianisation $\pi_1(X, x_0)^{ab}$, le premier groupe d'homologie. $H_1(X, \mathbb{Z})$
Il existe aussi des $H_n(X, \mathbb{Z})$ qui sont plus facile à calculer. On peut les utiliser pour montrer que $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ sont homeom $\Leftrightarrow m = n$.
Un cours est proposé en ...?